3

Funciones y gráficas

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

3.2 Gráficas de ecuaciones

3.3 Rectas

3.4 Definición de función

3.5 Gráficas de funciones

3.6 Funciones cuadráticas

3.7 Operaciones en funciones

El término matemático *función* (o su equivalente latino) data del siglo XVII, cuando el cálculo estaba en las primeras etapas de desarrollo. Este importante concepto es ahora la espina dorsal de cursos avanzados en matemáticas y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

En este capítulo estudiamos propiedades de funciones con el empleo de métodos algebraicos y gráficos que incluyen la localización de puntos, determinación de simetrías y cambios horizontales y verticales. Estas técnicas son adecuadas para obtener bosquejos aproximados de gráficas que nos ayudan a entender propiedades de las funciones; los métodos de nuestro tiempo utilizan programas avanzados de computadoras y matemáticas avanzadas para generar representaciones gráficas de funciones sumamente precisas.

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

En la sección 1.1 estudiamos la forma de asignar un número real (coordenada) a cada punto sobre una recta. Ahora mostraremos cómo asignar un **par ordenado** (a, b) de números reales a cada punto en un plano. Aun cuando también hemos empleado la notación (a, b) para denotar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión puesto que en nuestra exposición siempre debe estar claro si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Introducimos un **sistema de coordenadas rectangulares** o **cartesianas,*** en un plano por medio de dos rectas perpendiculares coordenadas, llamadas **ejes de coordenadas,** que se cruzan en el **origen** O, como se ve en la figura 1. Muchas veces nos referimos a la recta horizontal como **eje *x*** y a la vertical como **eje *y*** y los marcamos como x y y, respectivamente. El plano es entonces un **plano coordenado** o **plano *xy*.** Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro partes denominadas **primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes,** marcados como I, II, III y IV, respectivamente (vea la figura 1). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.

A cada punto P en un plano xy se asigna un par ordenado (a, b), como se ve en la figura 1. A a le damos el nombre de **coordenada *x*** (o **abscisa**) de P, y b es la **coordenada *y*** (u **ordenada**). Decimos que *P tiene coordenadas* (a, b) y nos referimos al *punto* (a, b) o *punto* $P(a, b)$. Recíprocamente, todo par ordenado (a, b) determina un punto P con coordenadas a y b. Se **traza un punto** mediante un punto, como se ilustra en la figura 2.

Figura 1

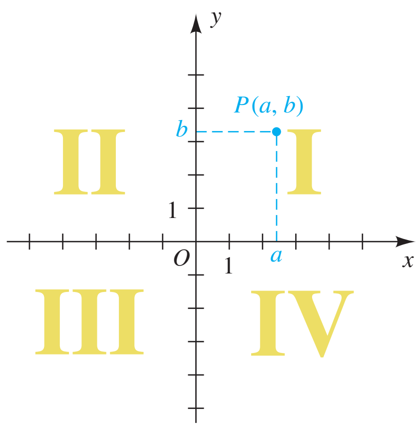
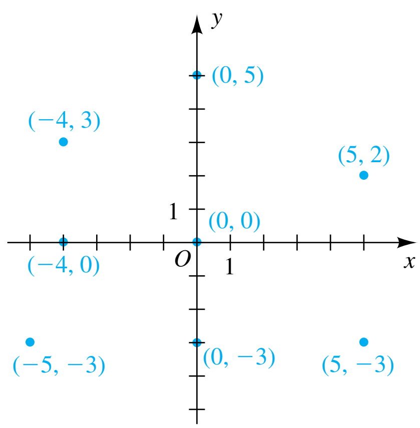


Figura 2



Para hallar la distancia entre dos puntos de un plano coordenado se usa la fórmula siguiente.

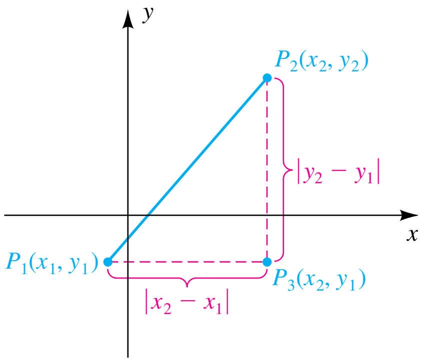
Fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre cualesquier dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

* El término *cartesianas* se usa en honor al matemático y filósofo René Descartes (1596-1650), que fue uno de los primeros en emplear estos sistemas de coordenadas.

Figura 3



PRUEBA Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ilustra en la figura 3, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

De la figura vemos que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \qquad \text{y} \qquad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Como $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, podemos escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Tomando la raíz cuadrada de cada lado de la última ecuación y usando el hecho de que $d(P_1, P_2) \geq 0$ tendremos la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran en la misma recta horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Del mismo modo, si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma recta vertical y

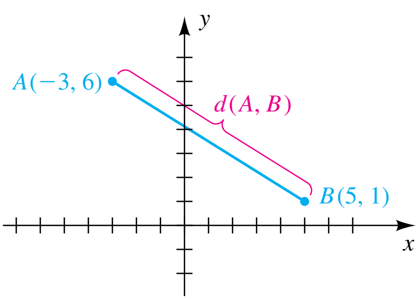
$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Éstos son casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aun cuando nos referimos a los puntos mostrados en la figura 3, nuestra prueba es independiente de las posiciones de P_1 y P_2.

Cuando aplique la fórmula de la distancia, observe que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ y, por tanto, el orden en el que restemos las coordenadas x y las coordenadas y de los puntos es intrascendente. Podemos considerar la distancia entre dos puntos como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Figura 4



EJEMPLO 1 **Hallar la distancia entre puntos**

Localice los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$ y encuentre la distancia $d(A, B)$.

SOLUCIÓN Los puntos están trazados en la figura 4. Por la fórmula de la distancia,

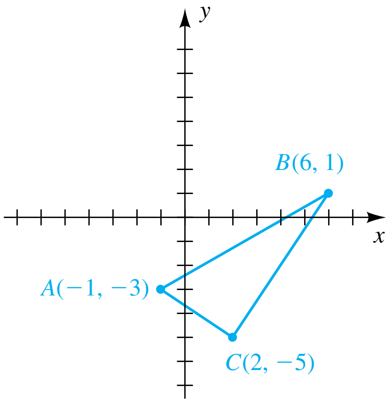
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 **Demostrar que un triángulo es un triángulo rectángulo**

(a) Localice $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ y demuestre que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

(b) Encuentre el área del triángulo ABC.

Figura 5



SOLUCIÓN

(a) Los puntos están trazados en la figura 5. Geométricamente, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(6+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \\ d(B, C) &= \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \\ d(A, C) &= \sqrt{(2+1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Como $d(A, B) = \sqrt{65}$ es el mayor de los tres valores, la condición a satisfacer es

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2.$$

Sustituyendo los valores hallados usando la fórmula de la distancia, obtenemos

$$[d(A, B)]^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = 65$$

y $\quad [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 52 + 13 = 65.$

Por tanto, el triángulo es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB.

Área de un triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$

(b) El área de un triángulo con base b y altura h es $\frac{1}{2}bh$. Consultando la figura 5, hacemos

$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \qquad \text{y} \qquad h = d(A, C) = \sqrt{13}.$$

En consecuencia, el área del triángulo ABC es

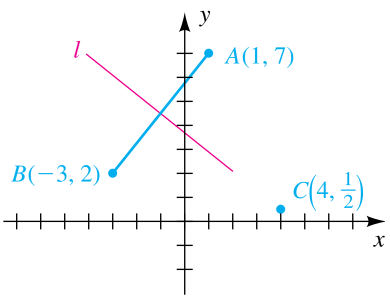
$$\tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\sqrt{52}\,\sqrt{13} = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\,\sqrt{13} = 13.$$

EJEMPLO 3 **Aplicación de la fórmula de la distancia**

Dados $A(1, 7)$, $B(-3, 2)$ y $C\left(4, \frac{1}{2}\right)$, demuestre que C está en la mediatriz del segmento AB.

SOLUCIÓN Los puntos A, B, C y la *mediatriz* l se ilustran en la figura 6. De geometría plana, l puede caracterizarse por cualquiera de las siguientes condiciones:

Figura 6



(1) l es la recta perpendicular al segmento AB en su punto medio.

(2) l es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos extremos del segmento AB.

Usaremos la condición 2 para demostrar que C está en l al verificar que

$$d(A, C) = d(B, C).$$

Aplicamos la fórmula de la distancia:

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \sqrt{(4-1)^2 + \left(\tfrac{1}{2}-7\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(-\tfrac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{169}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}} \\ d(B, C) &= \sqrt{[4-(-3)]^2 + \left(\tfrac{1}{2}-2\right)^2} = \sqrt{7^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{49 + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, C es equidistante de A y B y la verificación está completa.

EJEMPLO 4 **Hallar una fórmula que describa una mediatriz**

Dados $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$, encuentre una fórmula que exprese el hecho de que un punto arbitrario $P(x, y)$ está en la mediatriz l del segmento AB.

SOLUCIÓN Por la condición 2 del ejemplo 3, $P(x, y)$ está en l si y sólo si $d(A, P) = d(B, P)$; esto es,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2}.$$

Para obtener una fórmula más sencilla, elevemos al cuadrado ambos lados y simplifiquemos términos de la ecuación resultante, como sigue:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-7)^2 &= [x-(-3)]^2 + (y-2)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \\ -2x + 1 - 14y + 49 &= 6x + 9 - 4y + 4 \\ -8x - 10y &= -37 \\ 8x + 10y &= 37 \end{aligned}$$

Nótese que, en particular, la última fórmula es verdadera para las coordenadas del punto $C\left(4, \frac{1}{2}\right)$ en el ejemplo 3, porque si $x = 4$ y $y = \frac{1}{2}$, la sustitución en $8x + 10y$ nos da

$$8 \cdot 4 + 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 37.$$

En el ejemplo 9 de la sección 3.3, encontraremos una fórmula para la mediatriz de un segmento usando la condición 1 del ejemplo 3.

Podemos hallar el punto medio de un segmento de recta al usar la fórmula siguiente.

Fórmula del punto medio	El punto medio M del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN Las rectas que pasan por P_1 y P_2 paralelamente al eje y se cruzan con el eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. De geometría plana, la recta que pasa por el punto medio M, paralela al eje y, corta al segmento A_1A_2 en el punto M_1 (vea la figura 7). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y por tanto $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 está a la mitad de A_1 a A_2, la coordenada x de M_1 es igual a la coordenada x de A_1 más la mitad de la distancia de A_1 a A_2, esto es,

$$\text{coordenada } x \text{ de } M_1 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

(continúa)